Міністерство освіти і науки України

Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя

Кафедра комп'ютерно-інтегрованих технологій

Навчально-методична література

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни

«Теорія інформації»

для студентів
за напрямом підготовки 6.050202
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Тернопіль
2017

УДК 681.3
М54

Укладач:
Курко А.М., канд. техн. наук, доцент.

Рецензент:
Решетник В.Я., канд. техн. наук, доцент.

Методичні вказівки розглянуто й затверджено на засіданні
кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 11 від 20 червня 2017 р.

Схвалено та рекомендовано до друку науково-методичною комісією
факультету прикладних інформаційних технологій та електроінженерії
Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.
Протокол № 8 від 24 червня 2017 р.

М54 Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Теорія інформації» для студентів за напрямом підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Укладач : Курко А.М. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2017. – 32 с.

УДК 681.3

Відповідальний за випуск *Курко А.М.*, канд. техн. наук, доцент.

ВСТУП

Дані методичні вказівки призначені полегшити самостійну роботу студентів при розрахунках величин, розглянутих в лекційному курсі. Графік здачі завдань подається лектором на першому лекційному занятті.

Розв'язки задач (згідно варіанту) оформляються окремим документом на аркушах білого паперу формату **А4** (210х297 мм). Текст роботи необхідно подавати, залишаючи на аркушах поля таких розмірів: **ліве** – 25-30 мм, **праве** – 10-15 мм, **верхнє** – 20 мм, **нижнє** – 20 мм. Нумерація сторінок повинна бути наскрізною для всього документа, подаватися у правому верхньому куті аркуша арабськими цифрами без знаку №. *Допускається двосторонній друк*. Першою сторінкою роботи є титульний аркуш, який не нумерується, але включається до загальної нумерації сторінок.

Текст виконується шрифтом Times New Roman або Arial (розмір **14**) текстового редактора **Word** (**37 рядків** на сторінці). Шрифт розміром **10** можна використовувати при поданні таблиць та рисунків. Абзацний відступ – **1,27** см. Вирівнювання основного тексту виконується «**за шириною**».

Формули та умовні знаки повинні бути введені до тексту за допомогою редакторів **Microsoft Equation** або **Myth Type**.

Рукописний текст виконувати синім кольором чітким почерком.

Допускається вклеювати роздруковані рисунки.

При використанні середовища **MathCAD** чи **Excel** роздруковки виносяться в додатки.

В кінці кожного розв'язку приводиться список використаної літератури.

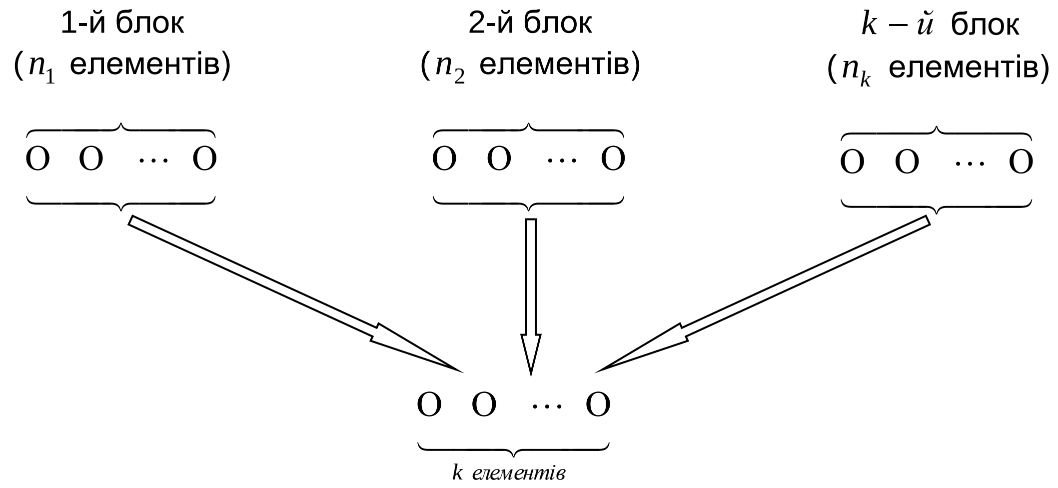
Варіант задач визначається порядковим номером у списку групи.

БАЗОВІ ТЕОРЕТИЧНІ ЕЛЕМЕНТИ В ЗАДАЧАХ

Типова методика розрахунків по схемах класичної імовірності базуються на поняттях комбінацій, розміщень і перестановок, що розглядаються в комбінаториці.

Нехай дано множину A, що містить n впорядкованих елементів (кожному елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число).

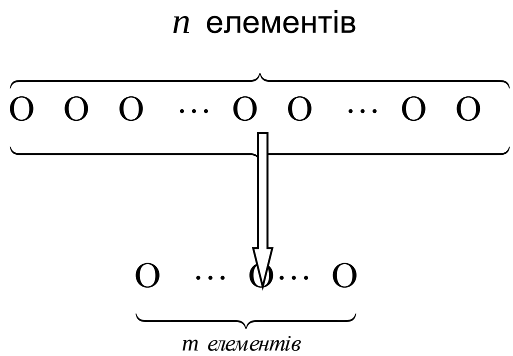
Якщо маємо k блоків елементів, чисельність кожного з яких становить n_1, n_2 …, n_k, то довільний вибір по одному елементу з кожної групи можна ілюструвати наступним чином:



Відтак кількість N способів здійснення вибору визначається ***основною формулою комбінаторики***:

$$N = n_1,\ n_2,\ \cdots\ n_k$$

ВИБІРКА – група ***різних*** елементів чисельністю m, утворена з сукупності ***різних*** елементів довільної природи чисельністю n.



Нехай $m < n$.

КОМБІНАЦІЇ (сполучення) із n елементів множини A по m – невпорядковані підмножини (групи), що містять m елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом розташування.

Загальне число комбінацій C_n^m (читається: це з n по m) знаходиться за формулою

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ ... \ \cdot(n-m+1)}{m!},$$

де $m! = m(m-1)\cdot \ ... \ \cdot 2\cdot 1$ (читається: m факторіал).

Помноживши чисельник і знаменник на $(n-m)!$ одержуємо:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Доцільно пам'ятати наступні рівності:

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1};$$

РОЗМІЩЕННЯ з n по m $(1 \le m \le n)$ – впорядковані підмножини (групи) множини A, що містять m елементів, які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх слідування.

Число розміщень A_n^m (читається: а з n по m) визначається за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

ПЕРЕСТАНОВКИ – розміщення із n по n, тобто $m = n$.

Число перестановок визначається за формулою:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ ... \ \cdot 2\cdot 1 = n!,$$

Число може набирати не тільки натуральні значення, а й дорівнювати нулю. Порожна множина (вибірка) може впорядковуватися тільки одним способом, тому $0! = 1$

Властивості числа комбінацій:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$;
2. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
3. $C_n^m = C_n^{n-m}$;
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$.

Розміщення, перестановки і комбінації пов'язані рівністю:

$$A_n^m = P_m C_n^m$$

РОЗМІЩЕННЯ з ПОВТОРЕННЯМИ – упорядковані $m - \textit{елементні}$ підмножини (групи), які відрізняються або складом елементів, або порядком їх шування.

Наприклад, при $m=4$ групи $\{a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_1\}$, $\{a_2,\ a_1,\ a_1,\ a_1\}$, $\{a_1,\ a_1,\ a_3,\ a_1\}$,

Число всіх розміщень з повтореннями з n елементів по m (записують $\overline{A}_n^m$) обчислюється за формулою:

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Припустимо, що множина A містить n елементів m різних типів: n_1 елемент 1-го типу, n_2 елемент 2-го типу, … n_k елемент $k-го$ типу, причому $n_1+n_2+\ \dots\ +n_k=n$.

ПЕРЕСТАНОВКИ з ПОВТОРЕННЯМ такої множини A називаються будь-які упорядковані множини з n елементів, які можуть повторюватись.

Число всіх таких перестановок (записують обчислюється за формулою

$$P_n(n_1,n_2,\ \dots\ ,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!,\ \dots\ ,n_k!}.$$

СПОЛУЧЕННЯ з ПОВТОРЕННЯМИ – невпорядковані групи (підмножини), які відрізняються складом елементів.

Наприклад, при $m=4$ набори $\{a_1,\ a_1,\ a_2,\ a_1\}$, $\{a_2,\ a_1,\ a_1,\ a_1\}$ є однаковими для даного експерименту, а набір $\{a_1,\ a_1,\ a_3,\ a_1\}$ відрізняється від двох попередніх.

Число сполучень з повтореннями із n елементів по m (записують $\overline{C}_n^m$) обчислюється за формулою

$$P_n(n_1,n_2,\ \dots\ ,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!,\ \dots\ ,n_k!}.$$

Правила, яких необхідно дотримуватися при розв’язуванні задач комбінаторики:

Правило суми. Якщо деякий об’єкт **А** можна вибрати з сукупності об’єктів m способами, а інший об’єкт **В** можна вибрати k способами, то вибрати або **А**, або **В** можна $m+k$ способами.

Правило добутку. Якщо деякий об’єкт **А** можна вибрати з сукупності об’єктів m способами і після кожного такого вибору об’єкт **В** можна вибрати k способами, то пару об’єктів(**А**, **В**) можна вибрати $m\cdot k$ способами.

Задача 1

Алфавіт складається з 5 символів. Обчислити кількість перестановок з 5 символів.

Розв'язок

При $n = 5$ маємо:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Задача 2

Обчислити кількість сполучень із 5 символів по 3.

Розв'язок

При $n = 5$ і $m = 3$ маємо:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

Задача 3

Обчислити кількість розміщень із 5 символів по 3.

Розв'язок

При $n = 5$ і $m = 3$ маємо:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$$

Задача 4

Скількома способами можна обрати три кодові комбінації з групи, чисельністю 20 комбінацій?

Розв'язок

При $n = 20$ і $m = 3$ маємо:

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = 1140$$

В багатьох випадках багаторазове повторення того самого досліду (випробування) за тих самих умов дає приблизно однакову частоту, близьку до деякого числа p, настання деякої події. Це число називають **СТАТИСТИЧНОЮ ймовірністю** події, що розглядається.

ВИПРОБОВУВАННЯ (дослід) – спрямовані заплановані дії для отримання результату при дотриманні певного комплексу умов S.

Вважається, що ці умови є фіксованими: вони або об'єктивно існують, або створюються штучно і можуть бути відтворені необмежене число разів.

ВИПАДКОВА подія А – фактичний результат виконання дії при зафіксованих умовах.

ПРОТИЛЕЖНА подія – подія $\overline{A}$, що настає тільки тоді, коли не настає подія **А**.

ПОВНА ГРУПА – сукупність єдино можливих подій випробування (досліду).

ПРОТИЛЕЖНІ – дві єдино можливі події, що *утворюють **повну** групу*.

Якщо:

– з кожним елементарним наслідком $\omega_i (i = 1,\ 2,\ \dots\ n)$ можна зв'язати невід'ємне число p_i, яке називається ймовірністю цього наслідку, причому $p_1 + p_2 + \ \dots\ + p_n = 1$;
– ймовірність $P(A)$ настання події A, яка полягає в тому, що настала одна з елементарних подій $\omega_i, \omega_j,\ \dots\ \omega_s$ дорівнює сумі ймовірностей настання цих подій $P(A) = p_i + p_j + \ \dots\ + p_s$;
– множина елементарних подій одного випробування $\Omega = \{\omega_1, \omega_2,\ \dots\ \omega_n\}$ скінченна і утворює повну групу несумісних подій;
– якщо події $\omega_1, \omega_2,\ \dots\ \omega_n$ ***рівноймовірні***, тобто $p_1 = p_2 = \ \dots\ = p_n = 1/n$, то ймовірність $P(A)$ обчислюють за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}$$ – **КЛАСИЧНЕ** означення ймовірності

де m – число наслідків, які сприяють події;
n – число всіх рівноможливих наслідків.

ІМОВІРНІСТЮ події A називається число, що дорівнює відношенню числа випадків m, що сприяють появі події, до числа всіх рівноможливих результатів n:

Нехай множина елементарних подій Ω є вимірною неперервною сукупністю, $mes\Omega$ – її міра (довжина, площа, об'єм). Випадкова подія A є її вимірною підмножиною і має міру $mesA$. Дослід полягає у довільному виборі точки із множини Ω, причому всі точки мають однакові шанси бути вибраними. Подія A – попадання вибраної точки в область $A \subset \Omega$.

Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню міри A до міри Ω

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega}$$ **– ГЕОМЕТРИЧНЕ** означення ймовірності

Аксіоми теорії ймовірностей

1. $0 < P(A) < 1$; (ймовірність випадкової події);
2. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, якщо A і B несумісні, тобто $A \cdot B = \varnothing$

Властивості ймовірностей

1. $0 \le P(A) \le 1$;
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
3. $P(\varnothing) = 0$ (ймовірність неможливої події);
4. $P(\Omega) = 1$ (ймовірність достовірної події);
5. Якщо $A \subset B$, то $P(B - A) = P(B) - P(A)$;
6. Якщо $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

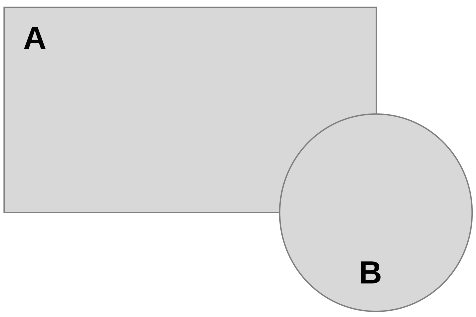
Таблиця 1 – Класифікація подій

Категорія	Назва	Ознаки
Можливість появи	**ВІРОГІДНІ** Ω	Обов'язково відбуваються в результаті досліду (випробовування)
	НЕМОЖЛИВІ $\varnothing$	обов'язково не відбуваються в результаті досліду (випробовування)
	РІВНОМОЖЛИВІ	якщо жодна з цих подій не є об'єктивно можливішою за інші
	ВИПАДКОВІ	інші події можливі, але не достовірні
сумісність появи	**СУМІСНІ**	***можуть*** відбуватися ***одночасно***
	НЕСУМІСНІ	***не можуть*** відбуватися ***одночасно***
взаємозалежність	**ЗАЛЕЖНІ**	*імовірність появи однієї* з них ***змінює*** *імовірність появи іншої*
	НЕЗАЛЕЖНІ	*імовірність появи однієї* з них ***не змінює*** *імовірність появи іншої*
складність	**ЕЛЕМЕНТАРНІ**	можливі події, що ***виключають*** одна одну внаслідок ***одного*** випробування
	СКЛАДНІ	події, що складаються з інших подій

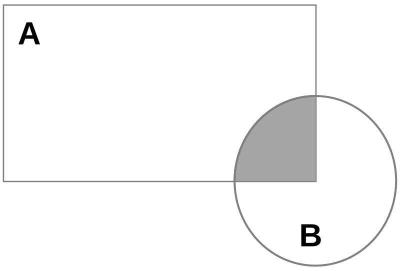
ДІЇ НАД ПОДІЯМИ

ВКЛЮЧЕННЯ: подія **A** тягне за собою **B** (**B** є наслідком **A**), якщо із настанням події **A** обов'язково настає подія **B**. Записують $\mathbf{A \subset B}$.

Події **A** і **B** називають ***рівними***, якщо $\mathbf{A \subset B}$ і $\mathbf{B \subset A}$. Записують $\mathbf{A = B}$.

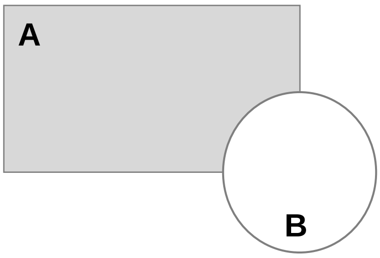


СУМОЮ (або **ОБ'ЄДНАННЯМ**) подій **A** і **B** називається подія, яка полягає у настанні події **A** або події **B**. Позначають $\mathbf{A + B}$ або $\mathbf{A \cup B}$.



ДОБУТКОМ (або **ПЕРЕРІЗОМ**) подій **A** і **B** називається подія, яка полягає в одночасному настанні як події **A**, так і події **B**. Позначають **A B** або **A ∩ B**.

РІЗНИЦЕЮ подій A і B називається подія, яка полягає в тому, що настає подія A, але не подія B. Позначають **A – B** або **A \ B**



Включення, суму, добуток і різницю подій геометрично можна зобразити так само, як включення, суму, добуток і різницю двох довільних множин.

ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ

1. $\varnothing \subset A \subset \Omega$
2. $\varnothing + A = A$
3. $\Omega + A = \Omega$
4. $A + B = B + A$
5. $(A + B) + C = A + (B + C)$
6. $A \cdot A = A$
7. $A \cdot \varnothing = \varnothing$
8. $A \cdot \Omega = A$
9. $A \cdot B = B \cdot A$
10. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
11. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
12. $A \cdot B + C = (A + C) \cdot (B + C)$
13. $A - B = A - (A \cdot B) = A \cdot \overline{B}$
14. $\overline{A} = \Omega - A$
15. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$
16. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ – закони де Моргана.

Необхідність кількісної переоцінки ймовірностей подій, що утворюють повну групу, виникає тоді, коли подія A настає разом з будь-якою з несумісних подій B_1, B_2, B_3, … B_n. В цьому випадку застосовується **формула Бейєса**:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$

Події B_1, B_2, B_3, … B_n називаються ***гіпотезами***.

Нехай відбувається n послідовних незалежних випробувань, в кожному з котрих може відбутися чи не відбутися подія A. Якщо ймовірність p настання події A постійна, то ймовірність ненастання доцільно позначити через q:

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - p = q$$

У випадку невеликої кількості випробувань ймовірність того, що в n випробовуваннях ця подія настає ріно k разів розраховується по **формулі Бернулі**:

$$P_n\left(k\right) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

де C_n^k – число сполучень з n по k.

ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА – змінна величина, яка в результаті випробування може приймати одне, завчасу невідоме значення $p(x_i)$ з відомої множини значень X.

ДИСКРЕТНА (перервна) випадкова величина – змінна величина, множина можливих значень якої зліченна.

НЕПЕРЕРВНА випадкова величина – змінна величина, що описується невід'ємною функцією $W\left(x\right)$ такою, що $F\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} W(t)dt$

Наприклад, кількість автомобілів біля світлофора – дискретна випадкова величина, а довжина скупченої колони – неперервна випадкова величина.

Випадкові величини позначаються великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z, а їх можливі значення – відповідними малими літерами x_1, x_2, ... x_n.

ЗАКОН РОЗПОДІЛУ випадкової величини – відповідність між можливими значеннями випадкових величин та їх ймовірностями.

Закон розподілу можна задати:

- аналітично;
- у вигляді таблиці;
- графічно.

Закон розподілу дискретної випадкової величини задається ***рядом розподілу***, тобто таблицею

X	x_1	x_2	...	x_n
P	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$

де x_1, x_2, ..., x_n – розташовані в бік зростання значення дискретної випадкової величини X;

$p(x_1),\ p(x_2)\ ...,\ p(x_n)$, – ймовірності значень дискретної випадкової величини X.

Зрозуміло, що $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ – ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, яке менше за задане значення x:

$$F(x) = P(X < x).$$

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(a,\ b)$ дорівнює $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.
4. Якщо всі можливі значення випадкової величини X знаходяться на інтервалі $(a,\ b)$,то $F(x) = 0$ при $x \le a$ і $F(x) = 1$ при $x \ge b$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Функція розподілу дискретної випадкової величини представляє собою ступінчасту функцію зі стрибками в точках x_1, x_2, ..., x_n.

ВЛАСТИВОСТІ ЩІЛЬНОСТІ ЙМОВІРНОСТІ

1. $W(x) \ge 0$.
2. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервал $(x_1,\ x_2)$ дорівнює інтегралу від щільності ймовірностей в цих межах:

$$P(x_2 \le X < x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W(x)dx = F(x_2) - F(x_1).$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1.$

У тих випадках, коли визначити закон розподілу випадкової величини неможливо, охарактеризувати випадкову величину можна з допомогою деяких постійних величин (числових характеристик) цього закону.

МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ – число, що виражає середнє значення випадкової величини з врахуванням розподілу.

Для дискретних величин вона обчислюється по формулі

$$M(x) = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \ \dots \ + x_1 \cdot p(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

де x_1, x_2, ..., x_n – можливі значення випадкової величини;

$p(x_1)$, $p(x_2)$ ..., $p(x_n)$, – їх ймовірності.

Для неперервних випадкових величин математичне сподівання – це число, котре визначається по формулі

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xW(x)dx \qquad \text{(сходиться).}$$

ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ

– $M(C) = C \quad (C = const)$;

– $M(CX) = CM(X) \quad (C = const)$;

– $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$;

– $M(XY) = M(X)M(Y)$ (для незалежних випадкових величин).

Відхилення можливих значень випадкової величини відносно математичного сподівання оцінюється дисперсією та середньоквадратичним відхиленням.

ДИСПЕРСІЯ випадкової величини X – величина, що дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення.

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для практичних обчислень доцільно застосовувати формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Для неперервних випадкових величин дисперсія обчислюється формулами:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 W(x)dx$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 W(x)dx-(M(X))^2$$

Дисперсія характеризує міру розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її математичного сподівання. З двох величин, що мають однакові математичні сподівання, «краща» – з меншим відхиленням.

ВЛАСТИВОСТІ ДИСПЕРСІЇ

– $D(C)=0 \quad (C=const)$;

– $D(CX)=C^2 D(X) \quad (C=const)$;

– $D(X \pm Y)=D(X)\pm D(Y)$;

СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ – арифметичний корінь із дисперсії випадкової величини.

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}$$

До основних законів розподілу неперервних випадкових відносяться:

– **нормальний** закон розподілу випадкової величини

$$W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty<x<\infty$$

Числа $a\in R$ та $\sigma>0$ називаються параметрами нормального закону. Нормальний закон з такими параметрами позначається $N(a,\sigma)$. В загальному випадку $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$.

– **показниковий** (**експоненціальний**) закон розподілу випадкової величини

$$W(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ a\cdot e^{-ax}, & x\geq 0 \end{cases}$$

Числові характеристики: $M(X)=\frac{1}{a}$, $D(X)=\frac{1}{a^2}$.

– **рівномірний** закон розподілу випадкової величини

$$W(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in[a,\ b] \\ 0 & x\notin[a,\ b] \end{cases}$$

Числові характеристики: $M(X)=\frac{a+b}{2}$, $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

Задача 5.

У послідовності з 6 двійкових символів є три одиниці. При передачі даної послідовності зберігається три символи, а решта втрачаються. Яка ймовірність того, що серед збережених буде не більше двох одиниць?

Розв’язок

Наявність серед двійкових символів не більше двох одиниць (тобто дві, або одна, або жодної) позначимо як подію A. Тоді ймовірність події A визначається як сума:

$$P(A) = P(X \le 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

Ймовірність кожного доданку можна розрахувати, використовуючи гіпергеометричний розподіл дискретної випадкової величини

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{}$$

Загальна кількість можливих комбінацій вибору символів дорівнює числу сполучень 3 із 6, тобто C_6^3.

Кількість сприятливих наслідків для $X = 2$ визначається як добуток $C_3^2 C_3^1$, де перший множник – число комбінацій вибору двох «одиниць» із більшого числа «одиниць» у послідовності. Проте з кожною такою комбінацією можуть зустрічатися символи, що не є «одиницями». Число таких комбінацій становить C_3^1. Тому шукана ймовірність набуває вигляду

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = 0{,}45$$

Аналогічно для

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = 0{,}45$$

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0 C_3^3}{C_6^3} = 0{,}05$$

Отже $P(A) = 0{,}95$

Задача 6.

По каналу зв’язку з завадами передається одна з двох команд управління у вигляді 11111 та 00000. Ймовірності передачі цих команд відповідно дорівнюють $0{,}7$ та $0{,}3$. Ймовірність правильного прийому кожного з символів 0 і 1 дорівнює $0{,}6$. Символи спотворюються завадами незалежно один від одного. На виході каналу одержано кодову комбінацію 10110. Визначити, яка комбінація була передана.

Розв’язок

Нехай прийом комбінації 10110 є подією A. Ця подія може відбутися разом з подіями B_1 (передавалась комбінація 11111) та B_2 (передавалась комбінація 00000). При цьому $P(B_1) = 0{,}7$; $P(B_2) = 0{,}3$.

Умовна ймовірність прийому комбінації 10110 при умові, що передавалась команда 11111 дорівнює

$$P(A/B_1) = P(1/1)\cdot P(0/1)\cdot P(1/1)\cdot P(1/1)\cdot P(0/1),$$

де $P(1/1) = 0{,}6$; $P(0/1) = 1 - P(1/1) = 0{,}4$

$$P(A/B_1) = 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4 = 0{,}035\ ,$$

Умовна ймовірність прийому комбінації 10110 при умові, що передавалась команда 00000 дорівнює

$$P(A/B_2) = P(1/0)\cdot P(0/0)\cdot P(1/0)\cdot P(1/0)\cdot P(0/0),$$

де $P(0/0) = 0{,}6$; $P(1/0) = 1 - P(0/0) = 0{,}4$

$$P(A/B_2) = 0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}023\,,$$

Тоді повна ймовірність $P(A)$ прийому комбінації 10110 становить

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) = 0{,}7\cdot 0{,}035 + 0{,}3\cdot 0{,}023 = 0{,}0314$$

По формулі Байєса

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}035}{0{,}0314} = 0{,}78$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}023}{0{,}0314} = 0{,}22$$

Порівняння одержаних результатів дозволяє зробити висновок, що передача команди 11111 є ймовірнішою.

Задача 7

По двійковому каналу зв'язку із завадами передаються символи 1 і 0 з ймовірностями $p_1 = p_2 = 0{,}5$. Ймовірність переходу одиниці в одиницю та нуля в нуль відповідно дорівнюють $p(1/1) = p$, $p(0/0) = q$. Визначити закон розподілу ймовірностей випадкової величини X – однозначного символу, що одержуємо на приймальному боці.

Розв'язок

$X = 0$ на приймальному боці можна одержати при передачі нуля або одиниці.

$P(B_1) = 0{,}5$ – ймовірність передати нуль;

$P(B_2) = 0{,}5$ – ймовірність передати одиницю;

За формулою повної ймовірності обчислюємо ймовірність появи події A

$$P(A) = P(X=0) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) =$$
$$= P(0)\cdot P(0/0) + P(1)P(0/1) = 0{,}5\cdot q + 0{,}5\cdot(1-p) = 0{,}5(q+1-p)\text{'}$$

де $P(0/1) = 1 - P(1/1) = 1 - p$

Аналогічно $X=1$ на приймальному боці можна одержати при передачі нуля або одиниці.

$$P(C)=P(X=1)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=$$
$$=P(1)\cdot P(1/1)+P(0)P(1/0)=0{,}5\cdot p+0{,}5\cdot(1-q)=0{,}5(p+1-q),$$

де $P(1/0)=1-P(0/0)=1-q$

Для зручності розподіл ймовірностей подаємо у вигляді таблиці

X	0	1
p_i	$0{,}5(q+1-p)$	$0{,}5(p+1-q)$

Перевірка: $P(X=0)+P(X=1)=0{,}5(q+1-p)+0{,}5(p+1-q)$

Задача 8

Виконується прийом символів 0 і 1 до першої появи символу 1. Ймовірність появи 1 при прийомі $p=0{,}4$. Приймається не більше чотирьох символів. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ величини числа прийнятих символів.

Розв'язок

Ймовірність появи 0 при прийомі $p=0{,}6$.

Розподіл ймовірностей можна розрахувати наступним чином:

$P(X=1)=p(1)=0{,}4$ – ймовірність одержати 1 у першому випадку;

$P(X=2)=p(0)\cdot p(1)=0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}24$ – ймовірність одержати 1 у другому випадку;

$P(X=3)=p(0)\cdot p(0)\cdot p(1)=0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=0{,}144$ – ймовірність одержати 1 у третьому випадку;

$P(X=4)=p(0)\cdot p(0)\cdot p(0)\cdot p(1)+p(0)\cdot p(0)\cdot p(0)\cdot p(0)=0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4+0{,}6^4=0{,}216$

– ймовірність одержати 1 у четвертому випадку або ймовірність одержати чотири рази 0.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=1\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}24+3\cdot 0{,}144+4\cdot 0{,}216=2{,}176$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=1\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}24+9\cdot 0{,}144+16\cdot 0{,}216-2{,}176^2=1{,}382$$

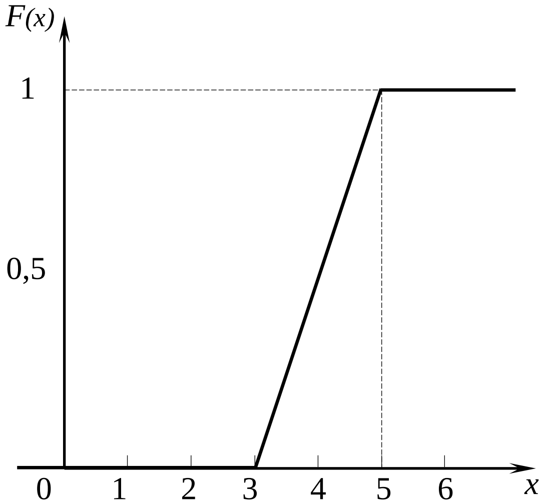
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1{,}17$$

Розподіл ймовірностей доцільно представляти у вигляді таблиці

X	1	2	3	4
p_i	0,4	0,24	0,144	0,216

Перевірка: $0{,}4+0{,}24+0{,}144+0{,}216=1$

Задача 9



Функція розподілу $F(X)$ випадкової величини X

Функція розподілу $F(X)$ випадкової величини X задана графіком.

Визначити:

– аналітичний вираз для функції розподілу;
– побудувати графік щільності ймовірностей $W(x)$;
– визначити ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(3{,}5;\ 4{,}5)$.

Розв'язок

1. З графіка бачимо, що при $X \in [3;5]$ функція розподілу $F(X)$ графік прямої проходить через дві точки з координатами $(3,\ 0)$ і $(5,\ 1)$. З рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

одержуємо

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-0}{1-0}.$$

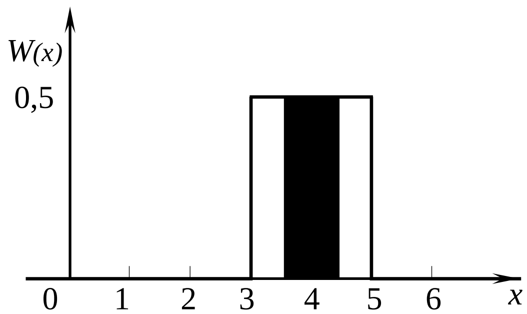
Відтак $F(X) = \dfrac{x-3}{2}$.

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ (x-3)/2 \quad \text{при} & 3 < x \le 5 \\ 1 & x > 5 \end{cases}$$

2. $W(x) = F'(x)$, тому

$$W(x) = \begin{cases} 0 & x \le 3 \\ 0{,}5 \quad \text{при} & 3 < x \le 5 \\ 0 & x > 5 \end{cases}$$



Графік щільності ймовірностей $W(x)$

$$P(3{,}5 < X < 4{,}5) = F(4{,}5) - F(3{,}5) = \frac{4{,}5-3}{2} - \frac{3{,}5-3}{2} = 0{,}5$$

Геометричний сенс визначеної ймовірності – площа заштрихованої фігури.

Задача 10

Задані ансамблі X і Y двох дискретних величин:

x_i	0,5	0,7	0,9	0,3
ймовірність появи	0,25	0,25	0,25	0,25

y_i	0,5	0,7	0,9	0,3
ймовірність появи	0,25	0,25	0,25	0,25

Порівняти їхні ентропії.

Розв'язок

Ентропія не залежить від конкретних значень випадкової величини. Оскільки ймовірності їх появи в обох випадках однакові, то

$$H(X) = H(Y) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i = -4(0{,}25 \log 0{,}25) = -4(0{,}25 \log 0{,}25) = \log 4 = 2 \ \textit{біт}$$

Задача 11

Знайти середнє значення кількості інформації, яка припадає на 1 елементарний символ (літеру) української абетки і порівняти з максимально можливою інформацією, що передається одним елементом.

Задача 12

Визначити кількість інформації в телевізійному сигналі, що відповідає одному кадру розгортки. Кадр складається з 625 рядків, кожний з яких є послідовністю з 600 випадкових по амплітуді імпульсів, причому амплітуда імпульсу може набувати будь-яке з 8 значень з кроком в 1 В.

Розв'язок

В даному випадку довжина повідомлення, що відповідає одному рядку, дорівнює числу випадкових по амплітуді імпульсів у ній: $n = 600$.

Кількість елементів повідомлення (знаків) в одному рядку дорівнює числу значень, які може прийняти амплітуда імпульсів у рядку: $m = 8$.

Кількість інформації в одному рядку

$$I = n \log m = 600 \log 8.$$

Кількість інформації в кадрі

$$I' = 625 I = 625 \cdot 600 \log 8 = 1{,}125 \cdot 10^6 \ \textit{біт}.$$

Задача 13

Визначити мінімальну кількість зважувань на рівноплечих шальках, щоб серед 27 зовні однакових монет знайти одну легшу, фальшиву монету.

Розв'язок

Оскільки монети ззовні однакові, то вони представляють джерело з рівноймовірними станами, а загальна невизначеність ансамбля, що характеризує його ентропію, становить

$$H_{заг} \log 27 \ \textit{біт}$$

Результат одного зважування може бути одним з:

– ліва чаша легша;
– права чаша легша;
– шальки перебувають у рівновазі.

Отже результат одного зважування представляє джерело з рівноймовірними станами, ентропія якого становить

$$H_{зв} = \log 3 \ \ біт$$

Оскільки ентропія відповідає вимогам адитивності, причому

$$H_{зфг} = 3H_{зв} = 3,$$

То для визначення фальшивої монети достатньо трьох зважувань.

Задача 14

Порівняти невизначеність, що припадає на букву джерела інформації (російського алфавіту з врахуванням пропусків між словами), яка характеризується представленим в таблиці ансамблем (див. додаток), з невизначеністю, котра була б в цього ж джерела за умови рівноймовірнісного використання символів.

Розв'язок

При однакових ймовірностях появи будь-якої з всіх літер абетки невизначеність, що припадає на одну літеру, характеризує ентропія

$$H = \log m = \log 34 = 5{,}087 \ \ біт$$

Ентропію джерела, що характеризується заданим в таблиці ансамблем, визначають за формулою

$$H = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i = -0{,}138 \log 0{,}138 - 0{,}86 \log 0{,}86 - ... - 0{,}003 \log 0{,}003 \approx 4{,}536 \ \ біт$$

Отже, нерівномірність розподілу ймовірностей використання символів (літер) абетки зменшує ентропію джерела з $5{,}087$ *біт* до $4{,}536$ *біт*

Задача 15

Джерело струму видає символи з алфавіту $A = \{a_i\}, \ i = 1, \ 4$ з ймовірностями $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}4$; $p_4 = 0{,}1$. Знайти кількість інформації та надлишковість

Розв'язок

По формулі Шеннона

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

$$H(A) = -(0{,}2 \cdot \log 0{,}2 + 0{,}3 \cdot \log 0{,}3 + 0{,}4 \cdot \log 0{,}4 + 0{,}1 \cdot \log 0{,}1 = 1{,}86 \ \ біт$$

Налдишковість

$$p = 1 - \frac{H(A)}{\log_2 4} = 1 - \frac{1,86}{2\log_2 2} = 0,07$$

Задача 16

Визначити кількість інформації та ентропії повідомлення з 5 літер букв, якщо число літер у алфавіті дорівнює 32 і всі повідомлення рівноймовірні.

Розв'язок

Загальне число п'ятилітерних повідомлень дорівнює $N = m^n$

$$N = 32^5.$$

Єнтропія для рівноймовірних повідомлень по формулі Хартлі

$$H = \log_2 N$$

$$H = \log_2 32^5 = 5\log_2 2^5 = 25 \ \textit{біт}$$

Задача 17

Задано розподіл ймовірностей випадкової дискретної двомірної величини:

X \ Y	4	5
3	0,17	0,10
10	0,13	0,30
12	0,25	0,05

Знайти закони розподілу X та Y.

Розв'язок

Додавши ймовірності «по рядках», одержимо ймовірності можливих значень X:

$$P(3) = 0,17 + 0,10 = 0,27;$$

$$P(10) = 0,13 + 0,30 = 0,43;$$

$$P(12) = 0,25 + 0,05 = 0,30.$$

Перевірка: $0,27 + 0,43 + 0,30 = 1$.

Представимо розподіл X у вигляді таблиці

X	3	10	12
$P(x_i)$	0,13	0,30	10

Додавши ймовірності «по стовпцях» одержимо розподіл Y:

$$P(4) = 0,17 + 0,13 + 0,25 = 0,55;$$

$$P(5) = 0,10 + 0,30 + 0,05 = 0,45;$$

Перевірка: $0,55 + 0,45 = 1$.

Представимо розподіл Y у вигляді таблиці

Y	4	5

$P(y_i)$	0,55	0,45

Перевірка: $0{,}55+0{,}45=1$.

Задача 18

Лінією зв'язку передаються неперервні амплітудно-модульовані сигнали $x(t)$, розподілені по нормальному закону з математичним очікуванням $m_x=0$ і дисперсією $\sigma_x^2=\sigma^2=8B^2$.

Визначити ентропію $H(X)$ сигналу при точності його вимірювання $\Delta x=0{,}2\ B$.

Розв'язок

За умовою щільність ймовірностей сигналу $x(t)$

$$W(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$$

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{\infty}W(x)\log W(x)dx-\log\Delta x=-\frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty}W(x)\log W(x)dx-\log\Delta x=$$

$$-\frac{1}{\ln 2}\int_{-\infty}^{\infty}W(x)\left[\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx-\log\Delta x=-\frac{1}{\ln 2}\left(\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)-\log\Delta x=$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}\ln\sqrt{2\pi e\sigma^2}-\log\Delta x=\log\frac{\sqrt{2\pi e\sigma^2}}{\Delta x}$$

Підставивши числові значення, одержуємо

$$H(X)=\log\frac{\sqrt{2\pi e8}}{0{,}2}\cong 5{,}87\ \ \text{дв. од.}$$

Задача 19

Визначити повну ентропію системи X, стан якої має експоненціальний розподіл.

Розв'язок

Повна ентропія системи X

$$H(X)=H^*(X)-\log_2\Delta x,$$

$$H^*(X) = M[-\log W(x)] = M[-\log a \cdot e^{-ax}] = M[-\log_2 a - \log_2 e^{-ax}] =$$

$$-\log_2 a + M[ax \cdot \log_2 e] = -\log_2 a + a \cdot \log_2 e \cdot M[x] = -\log a + a \cdot \log_2 e \cdot \frac{1}{a} = \log_2 \frac{e}{a}$$

$$H(X) = H^*(X) - \log_2 \Delta x = \log_2 \frac{e}{a} - \log_2 \Delta x = \log_2 \frac{e}{a\Delta x}$$

Задача 20

На вхід дискретного симетричного каналу без пам'яті поступають двійкові символи $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$ з апріорними ймовірностями $p(x_1) = 0{,}85$ та $p(x_2) = 0{,}15$. Перехідні ймовірності $p(y_j / x_i)$ в такому каналі задаються співвідношенням

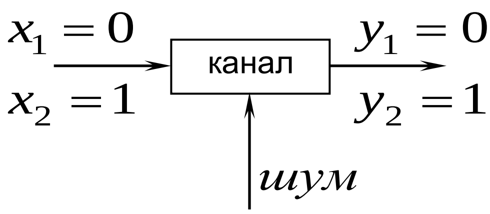
$$p(y_j / x_i) = \begin{cases} p & j \neq i \\ 1 - p & j = i \end{cases},$$

де $p = 0{,}05$ – ймовірність помилки.

Визначити всі апостеорні ймовірності.

Розв'язок

Ситуація в каналі характеризується схемою



Оскільки $p = 0{,}05$, то ймовірність правильного прийому $q = 1 - 0{,}05$.

В цьому каналі кожний кодовий символ може бути прийнятий з помилковою ймовірністю

$$p(y_1 / x_2) = p(y_2 / x_1) = p = 0{,}05$$

Правильно передана інформація описується

$$p(y_1 / x_1) = p(y_2 / x_2) = q = 0{,}95$$

По формулі Байєса апостеорні ймовірності

$$p(x_i / y_i) = \frac{p(x_i)\, p(y_i / x_i)}{p(y_i)} = \frac{p(x_i)\, p(y_i / x_i)}{\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\, p(y_i / x_i)}.$$

$$p(x_1 / y_1) = \frac{p(x_1)\, p(y_1 / x_1)}{p(x_1)\, p(y_1 / x_1) + p(x_2)\, p(y_1 / x_2)} = \frac{0{,}85 \cdot 0{,}85}{0{,}85 \cdot 0{,}95 + 0{,}15 \cdot 0{,}05} = 0{,}991$$

$$p(x_1/y_2)=\frac{p(x_1)p(y_2/x_1)}{p(x_1)p(y_1/x_1)+p(x_2)p(y_2/x_2)}=\frac{0{,}85\cdot 0{,}05}{0{,}85\cdot 0{,}05+0{,}15\cdot 0{,}95}=0{,}23$$

$$p(x_2/y_1)=\frac{p(x_2)p(y_1/x_2)}{p(x_2)p(y_1/x_2)+p(x_1)p(y_1/x_1)}=\frac{0{,}15\cdot 0{,}05}{0{,}15\cdot 0{,}05+0{,}85\cdot 0{,}95}=0{,}009$$

$$p(x_2/y_2)=\frac{p(x_2)p(y_2/x_2)}{p(x_2)p(y_2/x_2)+p(x_1)p(y_2/x_1)}=\frac{0{,}15\cdot 0{,}95}{0{,}15\cdot 0{,}95+0{,}85\cdot 0{,}05}=0{,}77$$

Задача 21

Каналом зв'язку передається повідомлення з ансамбля

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0{,}09 & 0{,}1 & 0{,}22 & 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}17 & 0{,}02 & 0{,}18 \end{pmatrix}$$

Середня тривалість передачі одного елемента повідомлення в каналі $\tau=0{,}44\ \text{мс}$. Шум в каналі відсутній. Визначити пропускну здатність каналу і швидкість передачі інформації.

Розв'язок

За умови відсутності шуму в каналі його пропускна здатність

$$c=V_T\log m;\qquad V_T=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{0{,}44\cdot 10^{-3}}=2273\ \ c^{-1}.$$

Об'єм алфавіту даного повідомлення $m=8$

$$c=\frac{1}{0{,}44\cdot 10^{-3}}\log_2 8=6819\ \ біт/c$$

Інформаційна швидкість

$$V=I(X,Y)\cdot V_T.$$

$$I(X,Y)=H(X)-H(X/Y).$$

Оскільки шум в каналі відсутній, то $H(X/Y)=0$, $I(X,Y)=H(X)$

Ентропія заданого розподілу

$$H(X)=\sum_{i=1}^{3}p(x_i)\log_2\frac{1}{p(x_i)}=0{,}09\cdot\log_2\frac{1}{0{,}09}+0{,}1\cdot\log_2\frac{1}{0{,}1}+0{,}22\cdot\log_2\frac{1}{0{,}22}+$$

$$+0{,}07\cdot\log_2\frac{1}{0{,}07}+0{,}15\cdot\log_2\frac{1}{0{,}15}+0{,}02\cdot\log_2\frac{1}{0{,}02}+0{,}18\cdot\log_2\frac{1}{0{,}18}+$$

$$+0{,}17\cdot\log_2\frac{1}{0{,}17}=2.44\ \textit{біт}$$

Задача 22

Джерело виробляє три повідомлення з ймовірностями: $p_1=0{,}1$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}7$. Повідомлення незалежні і передаються рівномірним двійковим кодом ($m=2$) з тривалістю символів, що дорівнює $1\ \textit{мс}$. Визначити швидкість передачі інформації каналом зв'язку без завад.

Розв'язок

Для передачі трьох повідомлень рівномірним кодом необхідно два розряди, при цьому тривалість кодової комбінації дорівнює $2t$.

Середня швидкість передачі сигналу

$$V_T=\frac{1}{2t}=500\ \textit{бод}.$$

Швидкість передачі інформації

$$M=V_T H(X)=500\cdot 1{,}16=580\ \textit{біт/с}.$$

Задача 23

Каналом зв'язку передаються повідомлення, ймовірності яких дорівнюють: $p(x_1)=0{,}1$; $p(x_2)=0{,}2$; $p(x_3)=0{,}3$; $p(x_4)=0{,}4$. Канальна матриця, що визначає втрати інформації в каналі зв'язку

$$P(Y/X)=\begin{pmatrix}0{,}99 & 0{,}01 & 0 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}97 & 0{,}02 & 0\\ 0 & 0{,}01 & 0{,}98 & 0{,}01\\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0{,}99\end{pmatrix}$$

Визначити:

– ентропію джерела інформації $H(X)$;

– безумовну ентропію приймача інформації $H(Y)$;

– загальну умовну ентропію $H(Y/X)$;

– швидкість передачі інформації, якщо час передачі одного символу первинного алфавіту $t=0{,}1\ \textit{мс}$;

– втрати інформації в каналі зв'язку при передачі 500 символів алфавіту;

– середню кількість прийнятої інформації;

– пропускну здатність каналу зв'язку.

Розв'язок

Ентропія джерела повідомлень

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i) = 0{,}1 \cdot \log_2 0{,}1 + 0{,}2 \cdot \log_2 0{,}2 + 0{,}3 \cdot \log_2 0{,}3 +$$

$$+ 0{,}4 \cdot \log_2 0{,}4 = 1{,}8465 \ \textit{біт}$$

Ймовірність появи символів на виході приймача

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_i);$$

$$p(y_1) = 0{,}1 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 0{,}101$$

$$p(y_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}01 + 0{,}2 \cdot 0{,}97 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 = 0{,}198$$

$$p(y_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}98 + 0{,}4 \cdot 0{,}01 = 0{,}302$$

$$p(y_4) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}4 \cdot 0{,}99 = 0{,}399$$

Перевірка: $0{,}101 + 0{,}198 + 0{,}302 + 0{,}399 = 1$.

Ентропія приймача

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(y_i)\log_2 p(y_i) = -(0{,}101 \cdot \log_2 0{,}101 + 0{,}198 \cdot \log_2 0{,}198 +$$

$$+ 0{,}302 \cdot \log_2 0{,}302 + +0{,}399 \cdot \log_2 0{,}399) = 1{,}85 \ \textit{біт}$$

Загальна умовна ентропія

$$H(Y/X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(x_i y_j)\log_2 \frac{1}{p(y_j / x_i)}$$

$$H(Y/X) = -[0{,}1 \cdot (0{,}99 \cdot \log_2 0{,}99 + 0{,}01 \cdot \log_2 0{,}01) + 0{,}2 \cdot (0{,}01 \cdot \log_2 0{,}01 + 0{,}97 \cdot \log_2 0{,}97 +$$

$$+ 0{,}02 \cdot \log_2 0{,}02) + 0{,}3 \cdot (0{,}01 \cdot \log_2 0{,}01 + 0{,}98 \cdot \log_2 0{,}98 + 0{,}01 \cdot \log_2 0{,}01) +$$

$$+ 0{,}4 \cdot (0{,}01 \cdot \log_2 0{,}01 + 0{,}99 \cdot \log_2 0{,}99)) = 0{,}132$$

Швидкість передачі інформації

$$V = V_T (H(Y) - H(Y/X)) = \frac{1{,}85 - 0{,}132}{0{,}0001} = 17{,}18 \ \textit{кбіт}/\textit{с}$$

Втрати інформації в каналі зв'язку

$$\Delta I = k(H(Y/X)) = 500 \cdot 0{,}132 = 66 \ \text{біт}$$

Середня кількість прийнятої інформації

$$I = k(H(Y) - H(Y/X)) = 500 \cdot (1{,}85 - 0{,}132) = 859 \ \text{біт}$$

Пропускна здатність каналу зв'язку

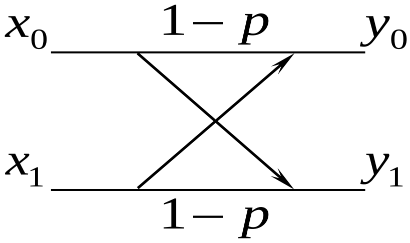
$$c = V(\log_2 m - H(Y/X)) = \frac{2 - 0{,}132}{0{,}0001} = 17{,}18 \ \text{кбіт}$$

Задача 24

Визначити швидкість передачі по двійковому симетричному каналу зв'язку при $\tau = 0{,}001 \ c$, якщо шуми в каналі вносять помилки таким чином, що в середньому чотири символи із 100 приймаються невірно (тобто 1 замість 0 і навпаки).

Розв'язок

Двійково симетричний канал можна представити схемою



Ймовірність помилки $p = \frac{4}{100} = 0{,}25$

Складемо таблицю ймовірностей

$p(x_0) = 0{,}5$; $\quad p(y_0/x_0) = 0{,}96$

$p(x_1) = 0{,}5$; $\quad p(y_1/x_0) = 0{,}04$

$p(y_0) = 0{,}5$; $\quad p(y_0/x_1) = 0{,}04$

$p(y_1) = 0{,}5$; $\quad p(y_1/x_1) = 0{,}96$

Пропускна здатність двійкового симетричного каналу

$$c = \frac{1}{\tau}(1 + (1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p) =$$

$$= 10^3(1 + 0{,}96\log_2 0{,}96 + 0{,}04\log 0{,}04) = 0{,}76 \ \text{кбіт}/c$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАДАЧІ

Задача 1

Інформаційний пристрій видає інформацію четвірковим кодом комбінаціями з чотирьох символів – x_1, x_2, x_3, x_4, ймовірності яких дорівнюють відповідно – $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$, $p(x_4)$. Знайти кількість інформації в бітах заданої кодової комбінації і максимальну ентропію джерела інформації.

Таблиця 1. Вихідні дані для розв'язку задачі 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p(x_1)$	0,2	0,15	0,05	0,1	0,55	0,45	0,4	0,5	0,5	0,45	0,13	0,57	0,43	0,1	0,3	0,2
$p(x_2)$	0,3	0.35	0,45	0,2	0,3	0,30	0,25	0,2	0,4	0,25	0,17	0,13	0,17	0,1	0,3	0,2
$p(x_3)$	0,4	0,45	0,25	0,25	0,15	0,15	0,2	0,15	0,05	0,2	0,3	0,12	0,2	0,2	0,2	0,5
$p(x_4)$	0,1	0,05	0,25	0,45	0,1	0,1	0,15	0,15	0,05	0,1	0,4	0,18	0,2	0,6	0,2	0,1

Задача 2

При амплітудній модуляції переносник сигналу (несущая частота) має амплітуду $U_m = 20\ B$, частоту f_0, фазу φ_0. Модулюючий сигнал має вид

$$s(t) = \sum_{k=1}^{3} s\cos(\Omega t + \varphi); \quad \Omega = 2\pi f$$

Записати математичний вираз АМ-сигналу і графічно показати його частотний спектр амплітуд. Шкалу частот розмітити в логарифмічному масштабі, шкалу амплітуд – в лінійному

Таблиця 2. Вихідні дані для розв'язку задачі 2

Вихідні дані	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f_0, $Гц$	10^5	$2\cdot10^5$	$4\cdot10^5$	$5\cdot10^5$	$6\cdot10^5$	$8\cdot10^5$	$9\cdot10^5$	10^6	$2\cdot10^6$	$3\cdot10^6$	$5\cdot10^6$	$6\cdot10^6$	$7\cdot10^6$	$8\cdot10^6$	$9\cdot10^6$	10^7
f_1, $Гц$	50	100	200	300	200	10^3	300	10^3	400	10^4	10^3	100	500	50	400	100

Продовження таблиції 2.

f_2, $Гц$	100	200	400	600	400	10^4	600	$2\cdot10^3$	800	$2\cdot10^4$	10^4	10^4	$5\cdot10^3$	10^3	$4\cdot10^3$	10^3
f_3, $Гц$	150	300	600	900	600	0	900	$3\cdot10^3$	$1,2\cdot10^3$	$3\cdot10^4$	0	0	0	0	0	0
S_1, B	1	2	5	5	2	1	4	5	2	2	5	2	5	5	5	2
S_2, B	2	3	6	5	5	5	4	5	5	3	5	7	1	3	5	3
S_3, B	5	3	4	5	4	0	4	5	2	5	0	0	0	0	0	0
φ_0	0	0	15	30	30	0	0	0	60	0	90	0	0	0	0	90
φ_1	30	25	0	зо	30	0	15	60	60	90	60	0	90	90	0	60
φ_2	30	45	30	60	60	0	30	90	60	0	60	0	60	45	0	60
φ_3	60	30	45	90	0	0	45	0	60	0	0	0	0	0	0	0

Задача 3

Дати опис характеристик кодів. Записати задане число у двійковому, натуральному двійково-десятковому кодах, коді Грея, в коді з перевіркою парності, у коді Хеммінга. Визначити характеристики записаних кодових комбінацій.

Таблиця 3. Вихідні дані для виконання задачі 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
N_{10}	17	19	21	23	26	29	ЗО	33	35	37	40	47	51	55	59	61

Задача 4

Закодувати оптимальним кодом Шеннона-Фено алфавіт з 8-ми символів, які мають задані частоти повторення. Знайти ентропію алфавіту та середньостатистичне число символів у кодових комбінаціях.

Таблиця 4. Вихідні дані для виконання задачі 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p(x_1)$	0,25	0,2	0,15	0,3	0,4	0,2	0.12	0.04	0.05	0.17	0.15	0.18	0.2	0.18	0.23	0.2

Продовження таблиції 4.

$p(x_2)$	0,2	0,15	0,1	0,2	0,15	0,1	0.16	0.16	0.1	0.10	0.05	0.12	0.1	0.16	0.12	0.15
$p(x_3)$	0,15	0,1	0,05	0,1	0,1	0,2	0.22	0.03	0.15	0.06	0.1	0.15	0.16	0.12	0.17	0.12
$p(x_4)$	0,1	0,05	0,25	0,05	0,15	0,1	0.08	0.17	0.2	0.02	0.1	0.25	0.14	0.14	0.13	0.13
$p(x_5)$	0,05	0,1	0,15	0,1	0,05	0.15	0.1	0.06	0.2	0.1	0.12	0.14	0.18	0.1	0.12	0.13
$p(x_6)$	0,1	0,3	0,2	0,1	0,05	0.15	0.2	0.14	0.15	0.2	0.2	0.05	0.08	0.08	0.09	0.1
$p(x_7)$	0.05	0,05	0,05	0,1	0,05	0.05	0.06	0.15	0.1	0.15	0.22	0.06	0.08	0.07	0.08	0.09
$p(x_8)$	0,1	0,05	0,05	0,05	0,05	0.05	0.06	0.25	0.05	0.15	0.08	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08

Значення функції $p_i \cdot \log_2 p_i$

p_i	$p_i \cdot \log_2 p_i$	p_i	$p_i \cdot \log_2 p_i$	p_i	$p_i \cdot \log_2 p_i$	p_i	$p_i \cdot \log_2 p_i$
0,01	-0,0664	0,26	-0,5053	0,51	-0,4954	0,76	-0,3009
0,02	-0,1129	0,27	-0,5100	0,52	-0,4906	0,77	-0,2903
0,03	-0,1518	0,28	-0,5142	0,53	-0,4854	0,78	-0,2796
0,04	-0,1858	0,29	-0,5179	0,54	-0,4800	0,79	-0,2687
0,05	-0,2161	0,30	-0,5211	0,55	-0,4744	0,80	-0,2575
0,06	-0,2435	0,31	-0,5238	0,56	-0,4684	0,81	-0,2462
0,07	-0,2686	0,32	-0,5260	0,57	-0,4623	0,82	-0,2348
0,08	-0,2915	0,33	-0,5278	0,58	-0,4558	0,83	-0,2231
0,09	-0,3127	0,34	-0,5292	0,59	-0,4491	0,84	-0,2113
0,10	-0,3322	0,35	-0,5301	0,60	-0,4422	0,85	-0,1993
0,11	-0,3503	0,36	-0,5306	0,61	-0,4350	0,86	-0,1871
0,12	-0,3671	0,37	-0,5307	0,62	-0,4276	0,87	-0,1748
0,13	-0,3826	0,38	-0,5305	0,63	-0,4199	0,88	-0,1623
0,14	-0,3971	0,39	-0,5298	0,64	-0,4121	0,89	-0,1496
0,15	-0,4105	0,40	-0,5288	0,65	-0,4040	0,90	-0,1368
0,16	-0,4230	0,41	-0,5274	0,66	-0,3956	0,91	-0,1238
0,17	-0,4346	0,42	-0,5256	0,67	-0,3871	0,92	-0,1107
0,18	-0,4453	0,43	-0,5236	0,68	-0,3783	0,93	-0,0974
0,19	-0,4552	0,44	-0,5211	0,69	-0,3694	0,94	-0,0839
0,20	-0,4644	0,45	-0,5184	0,70	-0,3602	0,95	-0,0703
0,21	-0,4728	0,46	-0,5153	0,71	-0,3508	0,96	-0,0565
0,22	-0,4806	0,47	-0,5120	0,72	-0,3412	0,97	-0,0426
0,23	-0,4877	0,48	-0,5083	0,73	-0,3314	0,98	-0,0286
0,24	-0,4941	0,49	-0,5043	0,74	-0,3215	0,99	-0,0144
0,25	-0,5000	0,50	-0,5000	0,75	-0,3113	1,00	0,0000

ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методична література

А.М. Курко

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни

«Теорія інформації»

для студентів
за напрямом підготовки 6.050202
«Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»

Комп’ютерне макетування та верстка *А.П. Катрич*

Формат 60х90/16. Обл. вид. арк. 0,74. Тираж 10 прим. Зам. № 2984.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя.
46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4226 від 08.12.11.